初等幾何の自動証明における効率的な補助線の発見法について

数理解析研究所講究録 1395 巻 2004 年 157-163

初等幾何の自動証明における 効率的な補助線の発見法について

宮本 健司　大矢 孝次　関川 浩　白柳 潔

KENJI MIYAMOTO*　KOJI OHYA　HIROSHI SEKIGAWA†　KIYOSHI SIRAYANAGI‡

法政大学工学部

FACULTY OF ENGINEERING, Hosei University

日本電信電話株式会社

NTT コミュニケーション科学基礎研究所

NTT COMMUNICATION SCIENCE LABORATORIES

1 はじめに

本研究は，初等幾何の証明問題を例に，人間の創造的思考の解明を目指すものである．人間は無限の探索空間を持つような問題に対して創造的思考により，効率よく解を導き出すことができる．この様な問題をコンピュータに解決させる方法として，無限木の探索において，探索空間の膨張を押さえながら効率よく行う探索戦略について述べる．

補助線を自動的に発見しながら証明を行う補助線付き推論 [1] は，証明の深さに関する幅優先探索を用いて，簡潔で読みやすい証明を得ることが出来る．演繹データベースを用いて推論を行う不動点法 [2] で行われている探索法は，補助点を追加するものとしないものに分けて交互に探索を行い，追加する補助点の数に限界を与えることで探索空間の膨張を防止している．

[1] では幅優先探索を用いているので，最も浅い解を導出するが，解が深いところにある場合には効率が悪い．また不動点法で用いられた探索法は，幾何の領域に限定した分類で汎用性がなく，また無限木の探索は放棄している．汎用の探索法としては，深さを少しずつ増やしながら深さ優先探索を行う反復深化法 [3]，幅を少しずつ広げながら探索を行う反復拡幅法 [4] などがある．反復深化法により得られる解は幅優先探索と同じである．また反復拡幅法は無限木の探索に用いるとすぐに発散してしまう．どちらの方法も無限木の探索を網羅的に効率よく行うことは困難である．

本論文で提案する**反復拡大法**は，探索空間を有限方向，無限方向に分けて，有限方向の全探索，無限方向への空間の拡大を交互に行うことで，探索空間の膨張を押さえながら探索を行う方法である．反復拡大法によって得られる解については「4 議論」の「反復拡大法の妥当性」で説明する．

補助線付き推論で反復拡大法を利用すると，従来の幅優先探索で行った場合と比較して探索するノードの数は 20 分の 1 程度に抑えられ，探索時間は最大で 1000 分の 1 になった．

反復拡大法は，探索木の枝が有限の種類を持ち，たどれる木が有限になるような枝の種類が決定できる場合に利用可能な探索戦略であり，領域によらず利用可能で，無限木の探索を効率よく行える．

*miyaken@k.hosei.ac.jp

†sekigawa@theory.brl.ntt.co.jp

‡shirayan@theory.brl.ntt.co.jp

2 反復拡大法

反復拡大法は，深さ無限の木の探索を行う方法である．探索木の枝の種類が有限であるような木に対し，探索空間を広げない非拡大枝集合，探索空間を広げる拡大枝集合に分類し，非拡大枝集合による全探索である閉包，拡大枝集合の探索である拡大の操作を交互に繰り返すことにより探索を行う．この章では，各用語の定義をし，反復拡大法のアルゴリズムを示す．

2.1 非拡大枝集合・拡大枝集合

記号

木 T の枝の集合を edge(T) と書く．Color を有限集合とするとき，T の色づけ c_T : edge(T) →Color は T の枝を有限種類に分類する．T を固定したとき，ノード v をルートとする部分木を down(v) と定義する．Color の部分集合 J に対して, $T' \subseteq T$ の枝を $c_T(a) \in J$ となる a ∈edge(T') に制限して得られたグラフのうち T' のルートを含む連結成分を $T'|_J$ と書く．

定義

枝が有限の種類 Color に分類されるような探索木について考える．枝の種類を $J \subseteq$Color に限定して探索を行った場合，木のどのノードから始めても必ず有限で停止するような集合 J のうち，極大集合を**非拡大枝集合**と呼び，その要素となる種類の枝を**非拡大枝**と呼ぶ．すなわち，c_T :edge(T) →Color に対し，非拡大枝集合は $J \subseteq$ Color であって T の任意のノード v に対して down(v)$|_J$ が有限になるような極大の J であり，非拡大枝は $c_T(e) \in J$ となる e である．非拡大枝集合の補集合を**拡大枝集合**と呼び，その要素となる種類の枝を**拡大枝**と呼ぶ．すなわち，E =Color$\backslash J$ が拡大枝集合であり，$c_T(e) \in E$ となる e が拡大枝である．

2.2 閉包・拡大

非拡大枝集合の要素のみによる全探索は必ず有限で停止するため，有限方向の探索である．この操作を**閉包**と呼ぶ．拡大枝集合の要素の探索は，拡大枝を追加して探索を行うと有限で停止しなくなるため無限方向への探索である．探索空間の急激な膨張をさけるため，非拡大枝のみで探索が進まなくなった場合に，拡大枝を一本追加する．この操作を**拡大**と呼ぶ．

探索アルゴリズム（反復拡大法）

入力：探索木 T（ルートは r）
　　　色づけ c_T : edge(T) →Color
　　　非拡大枝集合 J
　　　拡大枝集合 E
出力：探索結果
v =r
S を r のみからなる部分木とし，以下の操作を繰り返す．
1. 閉包：S' :=down(v)$|_J$, S := "S に S' を接ぎ木したもの"
　　S' の全探索を行う（全探索の方法は任意）
　　解が得られたら返して終了．
2. 拡大：$c_T(e) \in E$ なる S と連結な枝 e を一つ選び e のノードのうち，
　　S に入っていない方を v とする．

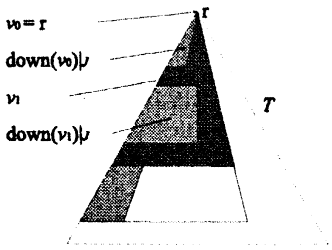

図 1: 反復拡大法による探索木

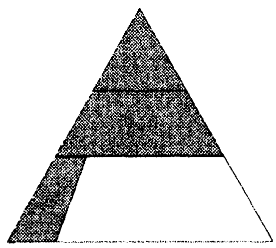

図 2: 補助線付き推論における探索木

2.3 探索木

反復拡大法によって探索を行った場合の探索木の様子を図 1 で示す．図の薄い影付きの部分は，閉包により広がった木 down(v)$|_J$ を表し，濃い影付きの部分は拡大拡大時に追加されたノード v を表している．

3 反復拡大法を用いた幾何証明探索

この章では補助線付き推論による幾何証明の探索に反復拡大法を応用する．補助線付き推論では，幾何学の初等的な知識を表す推論規則を用いて演繹により推論を行う．推論の過程で得られた知識の集合データベースに推論規則の前提が存在するとき，推論規則の帰結をデータベースに追加する．証明器はデータベースに求めたい事実が得られたとき，データベース内の知識の依存関係に従って証明を出力する．

3.1 探索木

従来の，幅優先探索による探索木を図 2 に示す．探索木は深さが証明の 1 ステップに対応した木で，ノードは推論規則によって追加される知識となり，枝は推論規則の適用となる．また図の影の部分はすでに探索した範囲で，得られた知識と知識の依存関係を保存したデータベースに相当する．

補助線付き推論における探索木の枝の種類

補助線付き推論では推論規則の適用が探索木の枝に相当するので，推論規則の種類によって枝の種類が分類可能である．(各推論規則の詳細は [1] を参照) これから考える例では，枝の種類は，Th1 : 中点連結定理（補助点の追加有り），Th2 : 中点連結定理（補助点の追加無し），Th3 : 二等辺三角形の公理 1，Th4 : 二等辺三角形の公理 2，Th5 : 平行の公理である．すなわち，Color = {Th1,Th2,Th3,Th4,Th5} である．

ところで，補助線付き推論では補助点は再帰的に追加可能であるが，補助点以外の幾何概念である，直線，長さ，角度，平行，交点，等の幾何概念は点の数で抑えられるため，補助点を追加しない推論規則の適用は探索空間の拡大を起こさない．しかし，補助点を追加すると，各幾何概念の数も増えるため探索空間が拡大する．よって，補助点を追加しない推論規則の集合が非拡大枝集合となり，補助点を追加する推論規則の集合が拡大枝集合となる．よって，補助線付き推論では．非拡大枝集合 J = {Th2,Th3,Th4,Th5}，拡大枝集合 E = {Th1} となる．

非拡大枝の例

図3で示すように，帰結にある点Pが前提となるデータベースにすでに存在する場合，この推論規則の適用が非拡大枝である．

拡大枝の例

図4で示すように，中点連結定理を適用したとき，帰結で追加される点Pが前提となるデータベースに存在しない場合，この規則の適用によって補助点Pが追加される．この推論規則の適用が拡大枝である．

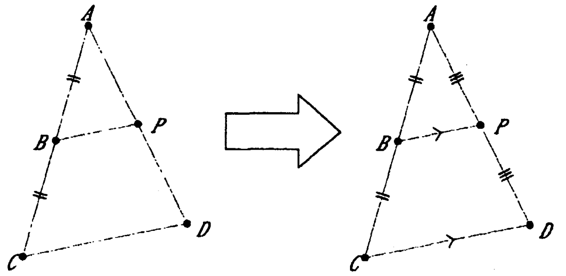

図 3: 非拡大枝となる推論規則（Th2）

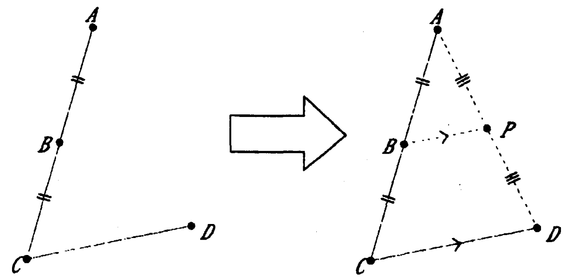

図 4: 拡大枝となる推論規則（Th1）

以上より，幾何証明における探索アルゴリズムは以下のようになる．

初等幾何における証明探索アルゴリズム

入力：問題の記述（仮定＋ゴール）＋推論規則の集合
出力：証明
1．作業用データベースを仮定で初期化
2．以下を繰り返す
　1：閉包）補助点を追加しない推論規則について幅優先の全探索を行い，
　　　　　ゴールが見つかれば，証明を出力し終了
　2：拡大）補助点を追加する規則の適用を元の木から幅優先で一つ選ぶ．

ここで，拡大時に適用を選ぶ戦略を幅優先としたことで全体として探索漏れが無くなることに注意せよ．

3.2 実験結果

中学生程度の問題の証明について，幅優先探索による方法と，反復拡大法を利用した場合の比較実験を行った．その結果を示す．

例1　図5で，AB = CD，AE = EC，BF = FD であるとき，∠HGI = ∠ EIC であることを証明せよ．

3.2.1 探索木の比較

幅優先探索で行った場合（左）と，反復拡大法で行った場合（右）の探索木を図6に示す．図で，数字は枝の数，括弧内の数字は追加した補助点の数（拡大枝の数）である．図を見て分かるように，反復拡大法を利用することにより，必要以上に探索空間を広げることなく証明が出来ている．

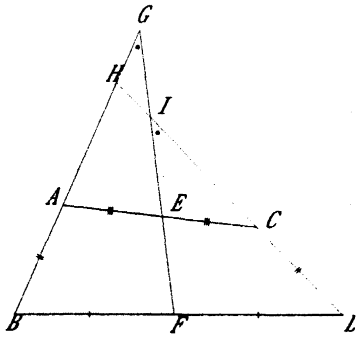

図 5: 例 1 の問題図

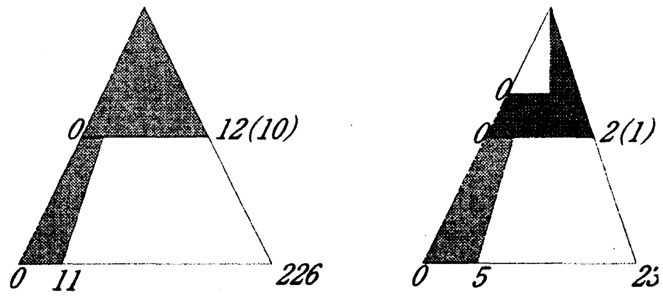

図 6: 例 1 の探索木

3.2.2 反復拡大法の結果

例 1 の証明を，幅優先探索（BFS），反復拡大法（IE）によって行った場合，またそれぞれの方法を共有適用点の優先化（SF）[1] を組み合わせて行った場合の結果を表 1 に示す．実行環境は，CPU PentiumM 1.6MHz，RAM 512MB，GNU Prolog ver.1.2.16 である．反復拡大法を用いた場合，探索過程において追加される補助点の数が減った事により，探索空間の広がりが抑えられ，高速化が達成されている．

表 1: 例 1 の実行結果の比較

探索方法	適用数	適用候補	補助点数	時間 [ms]
BFS	236	238	97	3605
SF+BFS	23	238	10	321
IE+BFS	24	85	3	310
IE+SF+BFS	7	25	1	70

BFS：幅優先探索，　SF：共有適用点の優先化，　IE：反復拡大法

4 議論

無限木の探索を効率よく行う汎用の探索戦略である反復拡大法を提案し，初等幾何の証明問題を例に有効性を示した．

反復拡大法の妥当性

幅優先探索ではある深さで証明が見つからない場合，その深さで発見された推論規則をすべて適用することになり，追加する補助点の数が非常に多くなってしまう．証明の過程において補助点の数が増えると証明に使われない補助点は無駄に探索空間を広げるだけとなり効率のよい証明探索の妨げになる．

また，得られる証明は証明の深さの最も浅い証明が得られることを保証していた．しかし，この場合，証明の深さは浅いが，補助点の数が多い証明が得られる可能性がある．反復拡大法によって得られる証明は，補助点の数が最小となる証明が得られる．前者の証明より，後者の方がより人間的な証明であると思われる．

適用範囲

反復拡大法は拡大のあと，閉包操作で全探索を行うことで，探索空間を拡大した後の深いところに解がある場合に特に有効である．以下で反復拡大法の効果が顕著に現れる例を示す．

例 2（反復拡大法が特に有効である問題） 図 7 で，AB = CD，M は AC の中点，N は BD の中点であるとき EG = FG であることを証明せよ．

実行結果

例 1 と同様に各方法による実行結果を表 2 に示す．

表 2: 例 2 の実行結果の比較

探索方法	適用数	適用候補	補助点数	時間 [ms]
BFS	NA	NA	NA	NA
SF+BFS	845	17718	75	560310
IE+BFS	27	97	3	370
IE+SF+BFS	10	31	1	310

探索木の比較

図 8 は例 2 の証明探索木である．この問題では，証明に必要な補助線を追加した後，深さ 2 にわたって探索が必要となり，幅優先探索で行うと，深さ 1 で証明に必要な補助線が追加されているにもかかわらず，さらに深さ 2 で多くの補助点を追加してしまい，その結果探索空間を大きく膨張させてしまう．反復拡大法を利用する事で，必要な補助線を追加した後の，無駄な探索を押さえることが出来る．これにより大幅な高速化につながる．

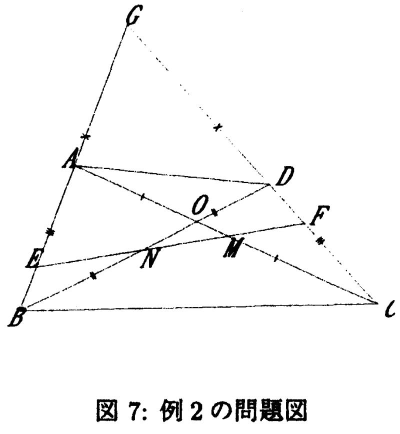

図 7: 例 2 の問題図

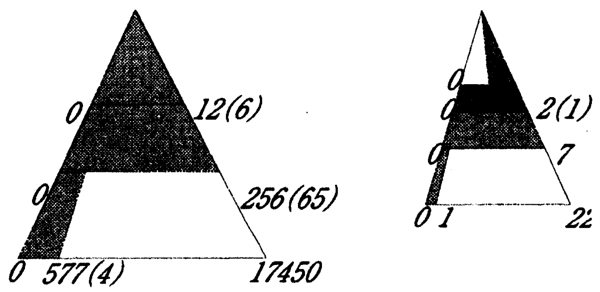

図 8: 例 2 の探索木

共有適用点の優先化との組み合わせ

反復拡大法は，表 1，表 2 をみて分かるように，単独で用いることが可能である，しかし，共有適用点の優先化と組み合わせて利用することでさらに効果を発揮する．

例 1 の問題について，各戦略による有効な補助線の発見の効果を図 9 に示す．

図 9 は，左から順に，幅優先探索＋共有適用点の優先化，反復拡大法，反復拡大法＋共有適用点の優先化で探索を行った結果，証明にたどり着くまでに追加した補助点（線）の様子である．反復拡大法と共有適

用点の優先化を組み合わせて利用した場合，それぞれを単独で利用した場合と比べ，証明に必要のない補助点の追加を減らすことが可能となり，有効な補助線を効率よく発見することができる．

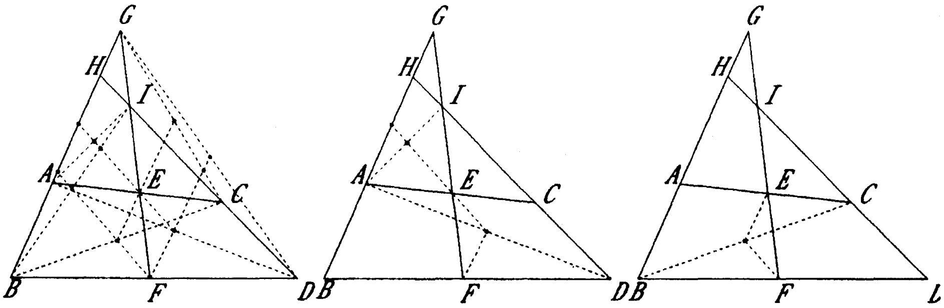

図 9: 例 1 で追加された補助線（点）

関連研究

Geometry EXpert(GEX) で実装されている不動点法は，補助線付き推論と同様に，幾何の概念を述語論理により表現し，演繹により推論を行う論理的方法である．しかし，補助点の導入を推論規則としている補助線付き推論とは異なり補助点の導入はアドホックに行われ，必ずしも証明の探索に使われる補助点だけを導入しているわけではない．また，不動点法では規則を，補助点を追加するかしないかに分け探索を行っているが，補助点には 2 直線の交点も含まれている．ところが，交点は直線の数で抑えられるため，探索空間の拡大を起こさない．つまり不動点法での補助点を追加しない規則の集合の選び方は不完全であり，反復拡大法における非拡大枝集合の極大性を満たさない．

また不動点法では，例 1，2 は解けなかった．不動点法は，追加した補助点を親として持つような補助点の追加は行わない為，網羅的な探索を行うことができないからである．

反復拡大法は，探索木の枝を分類することができれば，領域によらず応用可能であり，とくに，通常人間が考える問題によくあるような，探索空間が無限であり，かつ，解が深いところにある場合に有効な方法である．

参 考 文 献

[1] 宮本健司，関川浩，白柳潔，町田文彦．初等幾何における読みやすい証明の生成手法について． **京都大学数理解析研究所講究録** *1335*, *"Computer Algebra—Algorithms, Implementation and Application,"* pp. 20–27, 2003.

[2] Chau, S.-C., Gao, X.-S., and Zhang, J.-Z. A deductive database approach to automated geometry theorem proving and discovering. *Journal of Automated Reasoning,* Vol. 25, pp. 219–246, 2000.

[3] Korf, Richard E. Depth-first iterative deepening: An optimal admissible tree search. *Artificial Intelligence,* Vol. 27, pp. 97–109, 1985.

[4] Ginsberg, Matthew L., and Harvey, William D. Iterative broadening. *Proceedings of the Eighth National Conference on Artificial Intelligence,* pp. 216–220, 1990.